Diagonalisering av en matrise innebærer å uttrykke en kvadratisk matrise A som et produkt av tre matriser: $A = PDP^{-1}$, hvor D er en diagonal matrise, og P er en matrise med egenvektorer som kolonner. Dette gjør det enklere å utføre beregninger som matrisepotenser eller eksponentialer. For å diagonalisere en matrise, følger du disse trinnene:

Fremgangsmåte for diagonalisering av en matrise:

1. Finn egenverdiene til matrisen A

Egenverdier til A finner du ved å løse det **karakteristiske polynomet**:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Dette gir en ligning hvor λ representerer egenverdiene til matrisen A. For en $n \times n$-matrise vil dette være en polynomligning av grad n, og løsningene $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ er egenverdiene til matrisen.

Trinnvis fremgangsmåte:

- Beregn $A - \lambda I$, hvor I er identitetsmatrisen.
- Finn determinanten $\det(A - \lambda I)$.
- Løs likningen $\det(A - \lambda I) = 0$ for å finne λ (egenverdiene).

2. **Finn egenvektorer for hver egenverdi**

For hver egenverdi λ_i, finner du de tilhørende egenvektorene ved å løse ligningen:

$$(A - \lambda_i I)\mathbf{v} = 0$$

Dette er et homogent system av lineære ligninger som vil ha ikke-trivielle løsninger (egenvektorer). Hver løsning $\mathbf{v}_i$ er en egenvektor som tilsvarer egenverdien λ_i.

Trinnvis fremgangsmåte:

- For hver egenverdi λ_i, sett opp matrisen $A - \lambda_i I$.
- Løs ligningssystemet $(A - \lambda_i I)\mathbf{v} = 0$ for å finne nullrommet. Løsningen $\mathbf{v}_i$ er en egenvektor som tilhører egenverdien λ_i.

3. Konstruer matrisen P og den diagonale matrisen D

Etter å ha funnet egenverdiene og de tilhørende egenvektorene, kan du konstruere matriseproduktene som gir den diagonale formen:

- **Matrisen P**: Lag matrisen P ved å plassere egenvektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ som kolonner i matrisen P.

$$P = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n]$$

- **Den diagonale matrisen D**: Lag den diagonale matrisen D ved å plassere egenverdiene $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ på diagonalen. Resten av elementene i D er null.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

4. **Bekreft at matrisen er diagonaliserbar**

En matrise A er diagonaliserbar hvis og bare hvis den har n lineært uavhengige egenvektorer, hvor n er dimensjonen til matrisen A.

- Hvis alle egenverdiene har et fullstendig sett av lineært uavhengige egenvektorer, kan matrisen diagonaliseres.
- Hvis ikke, kan ikke matrisen diagonaliseres.

5. **Uttrykk matrisen A som $A = PDP^{-1}$**

Hvis alle stegene ovenfor er fullført, kan du skrive matrisen A som:

$$A = PDP^{-1}$$

Her er P matrisen av egenvektorer, D den diagonale matrisen med egenverdiene, og P^{-1} er den inverse av P.

Eksempel:

La oss diagonalisere matrisen:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. **Finn egenverdier**:
   - Sett opp $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

   Dette gir:

$$(4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

   Løsningene er $\lambda_1 = 5$ og $\lambda_2 = 2$.

2. **Finn egenvektorer**:

- For $\lambda_1 = 5$:

$$(A - 5I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Løs $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$, som gir $x = y$. Egenvektoren er $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- For $\lambda_2 = 2$:

$$(A - 2I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Løs $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$, som gir $y = -2x$. Egenvektoren er $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3. **Konstruer P og D:**
   - $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
   - $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
4. **Uttrykk matrisen som $A = PDP^{-1}$:** Vi har nå funnet at:

$$A = PDP^{-1}$$

Oppsummering av steg:

1. Finn egenverdier ved å løse $\det(A - \lambda I) = 0$.
2. Finn egenvektorer ved å løse $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$ for hver egenverdi.
3. Konstruer matrisene P (med egenvektorer som kolonner) og D (med egenverdiene på diagonalen).
4. Sjekk at A kan diagonaliseres og skriv $A = PDP^{-1}$.

Dette gir en kraftig måte å forenkle komplekse matriseoperasjoner på.