Varmeligningen i én dimensjon beskriver hvordan temperaturen utvikler seg over tid i et objekt som kun har varmeledning i én retning (for eksempel langs en tynn stav). Den bygger på Fourier's lov om varmeledning og kan skrives som:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Her er:

- $u(x,t)$ temperaturen som funksjon av posisjon x og tid t,
- α er den **termiske diffusiviteten**, som er en konstant avhengig av materialets egenskaper. Den er definert som $\alpha = \frac{k}{\rho c}$, hvor:
  - k er varmeledningsevnen,
  - ρ er materialets tetthet,
  - c er den spesifikke varmekapasiteten.

- Rekka

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{med } b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

tilfredstiller

$$\begin{array}{lll} \textit{Varmeledningslikningen} & \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{for } 0 < x < L \text{ og } t > 0. \\ \textit{Randkrav} & u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{for } t > 0. \\ \textit{Initialkrav} & u(x,0) = f(x) & \text{for } 0 < x < L. \end{array}$$

Fourier's lov i én dimensjon

Fourier's lov sier at varmestrømmen q_x i én retning (langs x-aksen) er proporsjonal med temperaturgradienten $\frac{\partial u}{\partial x}$:

$$q_x = -k\frac{\partial u}{\partial x}$$

Den negative fortegnet betyr at varme strømmer fra områder med høy temperatur til områder med lav temperatur.

Varmeligningen avledet fra energibalanse

Varmeligningen kan avledes fra energibalansen i et lite volum av materialet. Hvis vi ser på et infinitesimalt lite segment av lengde Δx, vil netto varmestrømmen som går inn i volumet være forskjellen mellom varmestrømmen ved x og $x + \Delta x$. Energibalansen gir oss at denne netto varmestrømmen forårsaker en endring i temperaturen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Dette uttrykket sier at temperaturens tidsderiverte $\frac{\partial u}{\partial t}$ er proporsjonal med temperaturens andrederiverte med hensyn til posisjonen x. Med andre ord beskriver varmeligningen hvordan temperaturendringer over tid bestemmes av hvor sterkt temperaturen varierer romlig i materialet.

Varmeligningen avledet fra energibalanse

Varmeligningen kan avledes fra energibalansen i et lite volum av materialet. Hvis vi ser på et infinitesimalt lite segment av lengde Δx, vil netto varmestrømmen som går inn i volumet være forskjellen mellom varmestrømmen ved x og $x + \Delta x$. Energibalansen gir oss at denne netto varmestrømmen forårsaker en endring i temperaturen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Dette uttrykket sier at temperaturens tidsderiverte $\frac{\partial u}{\partial t}$ er proporsjonal med temperaturens andrederiverte med hensyn til posisjonen x. Med andre ord beskriver varmeligningen hvordan temperaturendringer over tid bestemmes av hvor sterkt temperaturen varierer romlig i materialet.

Løsning av varmeligningen

Løsningen av denne ligningen avhenger av initialbetingelser og randbetingelser:

- **Initialbetingelse**: Gir temperaturfordelingen i materialet ved $t = 0$, for eksempel $u(x, 0) = f(x)$.
- **Randbetingelser**: Bestemmer temperaturen eller varmestrømmen ved grensene, for eksempel $u(0, t) = u(L, t) = 0$ (Dirichlet-randbetingelser) for en stav med null temperatur i endene.

Løsningen kan representeres ved metoder som **separasjons av variabler**, **Fourier-transformasjoner**, eller **Green's funksjoner**, avhengig av den spesifikke situasjonen og betingelsene.

For å løse varmeligningen i én dimensjon mer detaljert, skal vi bruke metoden **separasjon av variabler**. Vi vurderer varmeligningen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

med passende initial- og randbetingelser. Vi ser på en stav av lengde L, der temperaturutviklingen beskrives av $u(x,t)$, hvor $x \in [0,L]$ og $t \geq 0$.

Rand- og initialbetingelser

Vi antar Dirichlet-randbetingelser, som betyr at temperaturen ved endene av staven holdes konstant (for enkelhets skyld, 0):

$$u(0,t) = 0 \quad \text{og} \quad u(L,t) = 0 \quad \text{for alle } t \geq 0$$

Initialbetingelsen gir oss den innledende temperaturfordelingen langs staven ved $t = 0$:

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{for } x \in [0,L]$$

Målet er å finne $u(x,t)$ som tilfredsstiller både varmeligningen og disse betingelsene.

Separasjon av variabler

Vi antar at løsningen kan skrives som et produkt av en funksjon av x og en funksjon av t:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Ved å sette denne formen inn i varmeligningen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)\frac{dT}{dt} \quad \text{og} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T(t)\frac{d^2X}{dx^2}$$

Når vi setter dette inn i varmeligningen, får vi:

$$X(x)\frac{dT}{dt} = \alpha T(t)\frac{d^2X}{dx^2}$$

Del begge sider med $X(x)T(t)$, slik at vi får:

$$\frac{1}{T(t)}\frac{dT}{dt} = \alpha\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2}$$

Begge sider er nå avhengige av henholdsvis t og x, og derfor må begge være lik en konstant, som vi kaller $-\lambda$:

$$\frac{1}{T(t)}\frac{dT}{dt} = -\lambda \quad \text{og} \quad \alpha\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda$$

Dette gir oss to ordinære differensialligninger:

1. **Tidsligningen:**

$$\frac{dT}{dt} + \lambda T = 0$$

2. **Romligningen:**

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{\lambda}{\alpha}X = 0$$

Løsning av romligningen

Romligningen er en andreordens differensialligning med standardløsningen:

$$X(x) = A\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\alpha}}x\right) + B\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\alpha}}x\right)$$

Bruker vi randbetingelsene $u(0,t) = 0$ og $u(L,t) = 0$:

1. $X(0) = B = 0$ (siden $\cos(0) = 1$),
2. $X(L) = A\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\alpha}}L\right) = 0$.

For å få en ikke-triviell løsning (dvs. at $A \neq 0$), må:

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\alpha}}L = n\pi \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dette gir oss verdiene for λ:

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2\alpha}{L^2}$$

Dermed har vi løsningen for romligningen:

$$X_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Løsning av tidsligningen

Tidsligningen er en førsteordens lineær differensialligning:

$$\frac{dT}{dt} + \lambda_n T = 0$$

Løsningen er:

$$T_n(t) = C_n e^{-\lambda_n t} = C_n e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha}{L^2}t}$$

Generell løsning

Den generelle løsningen av varmeligningen er en sum av de separable løsningene vi har funnet:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha}{L^2}t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Bestemme koeffisientene A_n

For å finne koeffisientene A_n, bruker vi initialbetingelsen $u(x,0) = f(x)$. Dette gir:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Dette er en **Fourier-rekke**, der koeffisientene A_n bestemmes som:

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Når vi kjenner initialbetingelsen $f(x)$, kan vi beregne A_n-verdiene og dermed fullføre løsningen.

Oppsummering

Løsningen av varmeligningen i én dimensjon med Dirichlet-randbetingelser er:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha}{L^2}t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Der A_n er bestemt av initialbetingelsen $u(x,0) = f(x)$.

PDE

- Rekka

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \text{ med } b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

tilfredstiller

Bølgelikning	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	for $0 < x < L$ og $t > 0$.
Randkrav	$u(0,t) = u(L,t) = 0$	for $t > 0$.
Initialkrav	$u(x,0) = f(x)$ og $u_t(x,0) = 0$	for $0 < x < L$.

- Rekka

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \text{ med } b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

tilfredstiller

Varmeledningslikningen	$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	for $0 < x < L$ og $t > 0$.
Randkrav	$u(0,t) = u(L,t) = 0$	for $t > 0$.
Initialkrav	$u(x,0) = f(x)$	for $0 < x < L$.