Partielle differensialligninger (PDL) er differensialligninger som involverer partielle deriverte av en funksjon med flere uavhengige variabler. Disse ligningene brukes til å modellere en rekke fysiske fenomener som varmeoverføring, bølgebevegelser, væskestrømmer, og kvantemekanikk.

Oppsummering

Partielle differensialligninger er fundamentale verktøy for å modellere et bredt spekter av fenomener i naturen og teknologien. Ved å klassifisere PDL-er basert på deres orden, linearitet og type kan vi bedre forstå hvilke metoder som er best egnet for å løse dem.

1. Grunnleggende konsepter

En partielle differensialligning beskriver hvordan en ukjent funksjon $u(x_1, x_2, ..., x_n)$, som avhenger av flere variabler $x_1, x_2, ..., x_n$, endrer seg med hensyn til disse variablene. En PDL har generelt formen:

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, ...\right) = 0$$

Her kan u være en ukjent funksjon, og ligningen inneholder dens partielle deriverte av første, andre, eller høyere orden.

2. Klassifisering av partielle differensialligninger

PDL-er kan klassifiseres etter forskjellige kriterier, som orden, linearitet og typen løsning. Nedenfor er noen av de viktigste klassifikasjonene.

a) Etter orden

- **Førsteordens PDL**: Involverer kun førsteordens partielle deriverte av den ukjente funksjonen.
  - Eksempel: Transportligningen $u_t + cu_x = 0$, som beskriver en bølge som beveger seg med hastigheten c.
- **Andreordens PDL**: Involverer andreordens partielle deriverte.
  - Eksempel: Bølgingsligningen $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, som beskriver bølgebevegelser i en streng.

b) Etter linearitet

- **Lineær PDL**: Den ukjente funksjonen og dens deriverte opptrer på en lineær måte (ingen kvadrater, produkter, eller ikke-lineære termer av funksjonen eller dens deriverte).
  - Eksempel: Laplace-ligningen $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
- **Ikke-lineær PDL**: Den ukjente funksjonen eller dens deriverte opptrer på en ikke-lineær måte.
  - Eksempel: Navier-Stokes-ligningene for væskebevegelse, som er ikke-lineære.

c) Etter type (for andreordens PDL)

Andreordens PDL-er klassifiseres videre etter deres karakter i tre typer:

1. **Elliptisk PDL**: Disse ligningene har ingen tidsavhengighet og brukes ofte til stasjonære problemer, som beskriver likevektstilstander. Eksempel:
   - **Laplace-ligningen**: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$, som brukes i potensialteori og elektrostatikk.
   - **Poisson-ligningen**: $\Delta u = f(x, y)$, en generalisering av Laplace-ligningen som brukes i gravitasjonsteori og elektrostatikk.
2. **Parabolsk PDL**: Disse ligningene brukes til problemer med tidsavhengighet og diffusive prosesser. Eksempel:
   - **Varmeledningligningen** (eller diffusjonsligningen): $u_t = \alpha \nabla^2 u$, som modellerer varmefordeling i et materiale over tid.
3. **Hyperbolsk PDL**: Disse beskriver bølgefenomener der informasjon beveger seg med en bestemt hastighet. Eksempel:
   - **Bølgingsligningen**: $u_{tt} = c^2 \nabla^2 u$, som beskriver bølger på en streng eller i et medium som beveger seg med en hastighet c.

3. Vanlige partielle differensialligninger

a) Laplace-ligningen

- **Ligning**: $\Delta u = 0$ eller $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
- **Bruksområder**: Modellering av likevekts- eller stasjonære fenomener som elektrostatikk, gravitasjonspotensial og væskestrømmer i steady-state.
- **Egenskaper**: Denne ligningen er elliptisk, og dens løsninger er jevne og veloppførte (ingen sj eller uregelmessigheter).

b) Bølgingsligningen

- **Ligning**: $u_{tt} = c^2 \nabla^2 u$ eller $u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$.
- **Bruksområder**: Modellering av bølger på strenger, væsker, lyd og lysbølger.
- **Egenskaper**: Denne ligningen er hyperbolsk og beskriver bevaring av energi i systemer der bølger beveger seg med konstant hastighet c.

c) Varmeledningligningen

- **Ligning**: $u_t = \alpha \nabla^2 u$ eller $u_t = \alpha(u_{xx} + u_{yy})$, hvor α er varmeledningsevnen.
- **Bruksområder**: Modellering av varmeutbredelse i faste materialer, diffusjon av partikler i væsker eller gasser.
- **Egenskaper**: Denne ligningen er parabolsk og beskriver en jevn utjevning av varme eller andre kvantiteter over tid.

d) Navier-Stokes-ligningene

- **Ligning**: $\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 u + f$
- **Bruksområder**: Modellering av væske- og gassbevegelser, inkludert strømning rundt fly, i rør, og værfenomener.
- **Egenskaper**: Ikke-lineær ligning som beskriver komplekse bevegelsesmønstre, inkludert turbulens. Veldig vanskelig å løse eksakt.

4. Metoder for å løse PDL-er

a) Analytiske metoder

1. **Separasjon av variable**: Brukes når ligningen kan separeres i individuelle ligninger for hver variabel. Dette gir ofte løsninger i form av produktet av funksjoner av én variabel.
   - Brukes på Laplace-ligningen, varmeledningligningen, og bølgingsligningen.
2. **Fourier-transformasjon**: Brukes til å konvertere en PDL i tids- eller romdomene til en algebraisk ligning i frekvensdomene, som ofte er enklere å løse.
   - Brukes på bølgingsligningen og varmeledningligningen.
3. **Green's funksjon**: En metode for å løse PDL-er med randbetingelser ved å representere løsningen som en integrasjon av en kildefunksjon (Green's funksjon).
   - Brukes ofte i elektrostatikk og kvantefeltteori.

b) Numeriske metoder

1. **Finite differense-metoden**: Approksimerer deriverte ved hjelp av differenser og løser ligningen over et gitter av punkter.
2. **Finite element-metoden**: Deler opp domenet i små elementer og approksimerer løsningen som en lineær kombinasjon av basisfunksjoner.
3. **Spectral metoder:** Representerer løsningen som en sum av trigonometriske eller polynomielle funksjoner og løser ligningen i frekvensrommet.

5. Rand- og initialbetingelser

For å løse en PDL, må vi spesifisere randbetingelser (for verdiene langs grensene til domenet) og eventuelt initialbetingelser (for verdier ved en starttid):

- **Dirichlet-betingelser**: Funksjonens verdi er spesifisert på randen av domenet.
- **Neumann-betingelser**: Derivertens (gradientens) verdi er spesifisert på randen.
- **Initialbetingelser**: For tidsavhengige problemer må vi spesifisere funksjonens verdi ved en starttid (for eksempel i bølge- eller varmeligningen).