Bølgeligningen beskriver hvordan bølger, som lyd- eller vannbølger, forplanter seg over tid. Den generelle bølgeligningen i én romdimensjon (f.eks. langs en streng) er:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

hvor:

- $u(x,t)$ er bølgefunksjonen som beskriver bølgens høyde (eller forflytning) som en funksjon av posisjon x og tid t,
- c er bølgens hastighet.

Fourier-analyse er en metode for å løse bølgeligningen ved å dekomponere bølgefunksjonen $u(x,t)$ i sinus- og cosinuskomponenter. Dette er spesielt nyttig fordi bølger kan representeres som en sum av harmoniske svingninger.

- Rekka

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{med } b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx$$

tilfredstiller

$$\begin{array}{lll} \textit{Bølgelikning} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{for } 0 < x < L \text{ og } t > 0. \\ \textit{Randkrav} & u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{for } t > 0. \\ \textit{Initialkrav} & u(x,0) = f(x) \text{ og } u_t(x,0) = 0 & \text{for } 0 < x < L. \end{array}$$

Trinn for løsning av bølgeligningen ved bruk av Fourier-metoden:

1. **Initiale betingelser**: Løsningen $u(x,t)$ avhenger av hvordan bølgen ser ut ved tiden $t=0$ (initialform) og hvordan den beveger seg ved $t=0$ (startbetingelser for hastigheten). Disse initialbetingelsene er ofte gitt som:
   - $u(x,0)=f(x)$ (posisjon ved $t=0$),
   - $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x)$ (hastighet ved $t=0$).
2. **Fourier-serie-dekomposisjon**: Hvis $u(x,t)$ beskriver en periodisk bølge, kan vi bruke Fourier-serien til å skrive $u(x,t)$ som en sum av sinus- og cosinusfunksjoner. For en funksjon $u(x,t)$ definert på $[0,L]$, kan vi skrive:

   $$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n(t)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+B_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

   Her er $A_n(t)$ og $B_n(t)$ tidsavhengige Fourier-koeffisienter som vi skal finne.

3. **Innsetting i bølgeligningen**: Vi setter Fourier-serien for $u(x,t)$ inn i bølgeligningen. Fordi sinus- og cosinusfunksjonene er ortogonale, kan vi løse for hver harmonisk komponent separat.

   Ligningen reduseres da til to separate ordinære differensialligninger for hver $A_n(t)$ og $B_n(t)$:

$$\frac{d^2A_n(t)}{dt^2} = -\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 A_n(t)$$

$$\frac{d^2B_n(t)}{dt^2} = -\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 B_n(t)$$

   Løsningene av disse ligningene er sinus- og cosinusfunksjoner:

$$A_n(t) = A_n(0)\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + \frac{dA_n(0)}{dt}\sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

$$B_n(t) = B_n(0)\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + \frac{dB_n(0)}{dt}\sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

4. **Initialbetingelser**: Bruk de initiale betingelsene $u(x,0) = f(x)$ og $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$ for å bestemme Fourier-koeffisientene $A_n(0)$ og $B_n(0)$.
   - $A_n(0)$ finnes ved å bruke $u(x,0) = f(x)$.
   - $\frac{dA_n(0)}{dt}$ finnes ved å bruke $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$.

5. **Sammensatt løsning**: Den fullstendige løsningen for bølgeligningen er da en sum av de harmoniske komponentene:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n(0)\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n(0)\sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right)\cdot\cos\left(\frac{n}{}\right.$$

Tolkning av Fourier-løsningen:

- **Hver harmonisk komponent** representerer en bølge med en bestemt frekvens og amplitude.
- Disse komponentene kan sees som stasjonære bølger som superponeres for å beskrive den samlede bølgebevegelsen.
- De harmoniske bølgene forplanter seg med hastighet c, og hver harmonisk frekvens bestemmes av lengden L på det romlige intervallet.

Fourier-metoden er kraftig fordi den lar oss løse bølgeligningen som en sum av enklere bølger, noe som gjør det mulig å analysere komplekse bølgeformer som en kombinasjon av enklere sinus- og cosinusbevegelser.

Bølgeligningen beskriver hvordan bølger brer seg over tid, og kan uttrykkes som en andreordens partielle differensialligning. Den generelle formen for bølgeligningen i én romdimensjon er:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Her er:

- $u(x,t)$ forflytningen som en funksjon av posisjon x og tid t,
- c bølgens hastighet.

Løsning ved hjelp av Fourier-analyse

For å løse bølgeligningen med Fourier-analyse, transformerer vi funksjonen $u(x,t)$ til Fourier-rommet, som gjør at differensialligningen kan håndteres enklere.

1. Fourier-transformasjon

Vi starter med å ta Fourier-transformasjonen av funksjonen $u(x,t)$ med hensyn til den romlige variabelen x. Fourier-transformasjonen av en funksjon $u(x,t)$ er definert som:

$$\hat{u}(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-ikx} dx$$

Her representerer $\hat{u}(k,t)$ den transformerte funksjonen i frekvensrommet, og k er bølgetallet (frekvenskomponenten i rommet).

2. Fourier-transformere bølgeligningen

Vi transformerer bølgeligningen $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ ved å bruke Fourier-transformasjonen på hver side:

- Fourier-transformen av $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ blir $-k^2 \hat{u}(k,t)$.
- Fourier-transformen av $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ blir $\frac{\partial^2 \hat{u}(k,t)}{\partial t^2}$, fordi tidsderivertene ikke påvirker den romlige transformasjonen.

Dette gir oss en ny ligning i Fourier-rommet:

$$\frac{\partial^2 \hat{u}(k,t)}{\partial t^2} = -c^2 k^2 \hat{u}(k,t)$$

3. Løsning i Fourier-rommet

Denne ligningen er en homogen andreordens differensialligning med løsningen:

$$\hat{u}(k,t) = A(k)\cos(ckt) + B(k)\sin(ckt)$$

Her er $A(k)$ og $B(k)$ ukjente funksjoner som bestemmes av initialbetingelsene. Denne løsningen beskriver hvordan de forskjellige frekvenskomponentene k oppfører seg over tid.

4. Invers Fourier-transformasjon

For å finne løsningen i det opprinnelige rommet, utfører vi den inverse Fourier-transformasjonen for $\hat{u}(k,t)$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k,t)e^{ikx}dk$$

Settes inn for $\hat{u}(k,t)$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[A(k)\cos(ckt) + B(k)\sin(ckt)\right]e^{ikx}dk$$

5. Initialbetingelser og spesifikk løsning

For å bestemme de ukjente funksjonene $A(k)$ og $B(k)$, trenger vi initialbetingelser, som typisk er gitt som:

- $u(x,0) = f(x)$, den opprinnelige formen på bølgen,
- $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x)$, den opprinnelige hastigheten til bølgen.

Ved å bruke disse initialbetingelsene på løsningen i Fourier-rommet, kan vi finne uttrykkene for $A(k)$ og $B(k)$.

- Fra $u(x,0) = f(x)$, får vi $A(k)$ som Fourier-transformen til $f(x)$.
- Fra $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x)$, får vi $B(k)$ som Fourier-transformen til $g(x)$.

PDE

- Rekka

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \text{ med } b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx$$

  tilfredstiller

$$\begin{array}{lll} \textit{Bølgelikning} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{for } 0<x<L \text{ og } t>0. \\ \textit{Randkrav} & u(0,t)=u(L,t)=0 & \text{for } t>0. \\ \textit{Initialkrav} & u(x,0)=f(x) \text{ og } u_t(x,0)=0 & \text{for } 0<x<L. \end{array}$$

- Rekka

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \text{ med } b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx$$

  tilfredstiller

$$\begin{array}{lll} \textit{Varmeledningslikningen} & \frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{for } 0<x<L \text{ og } t>0. \\ \textit{Randkrav} & u(0,t)=u(L,t)=0 & \text{for } t>0. \\ \textit{Initialkrav} & u(x,0)=f(x) & \text{for } 0<x<L. \end{array}$$

Oppsummering

Ved å bruke Fourier-analyse kan vi løse bølgeligningen ved å dekomponere den opprinnelige bølgen i sin bestanddeler, der hver frekvenskomponent utvikler seg over tid i henhold til en enkel harmonisk funksjon. Fourier-transformasjonen gjør det mulig å behandle komplekse bølgefenomener på en mer håndterlig måte, spesielt når bølgen har komplekse former eller interagerer med flere frekvenser.